Ion CRĂCIUN

Departamentul de Matematică şi Informatică
Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iaşi

ME–11. TRANSFORMAREA LAPLACE

ME–12. APLICAŢII ALE TRANSFORMĂRII LAPLACE

IAŞI – **2012**

Cuprins

Capitolul 11

ME–11. Transformarea Laplace

11.1 Continuitate şi diferenţiabilitate

Fie f o funcţie reală definită pe un anumit interval deschis $(a,b) \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ care conţine punctul $x = c \in \mathbb{R}$.

Definiţia 11.1.1. *Spunem că f este **continuă** în $x = c$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Definiţia 11.1.2. *Funcţia f este **continuă** pe intervalul (a,b) dacă şi numai dacă este continuă în toate punctele $x \in (a,b)$.*

Mulţimea funcţiilor continue $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ formează un spaţiu vectorial real notat prin $C(a,b)$ sau $C^0(a,b)$.

Definiţia 11.1.3. *O funcţie f este **continuă** pe $[a,b]$ dacă ea este continuă pe (a,b) şi*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Cu alte cuvinte, nu există *comportare singulară* în extremităţile intervalului. Vom folosi $C[a,b]$ pentru a nota spaţiul vectorial al funcţiilor continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Mai jos, prezentăm o definiţie alternativă a continuităţii, echivalentă cu Definiţia 11.1.1.

Definiţia 11.1.4. *Funcţia f este **continuă** în $x = x_0$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o funcţie $\delta(x_0, \varepsilon)$ astfel încât*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \textit{când} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Dacă δ depinde numai de ε, adică are aceeaşi valoare pentru toţi x_0 dintr–un anumit interval I, spunem că f este *uniform continuă* pe I. Se poate arăta că dacă f este funcţie continuă pe un interval *închis*, atunci ea este uniform continuă acolo.

Definiţia 11.1.5. *Dacă*

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x),$$

*spunem că f **nu este continuă** în $x = c$.*

Există o importantă clasă de funcţii de această formă pentru care există un număr finit de *discontinuităţi*. O astfel de funcţie *sare* de un număar finit de ori. Astfel de funcţii sunt cunoscute ca *funcţii continue pe porţiuni*, şi, ca şi funcţiile continue, formează un spaţiu vectorial, pe care îl notăm prin $PC(a, b)$.

Definiţia 11.1.6. *Dacă limita **raportului incrementar** $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ există când $x \to c$, spunem că f este **diferenţiabilă** sau **derivabilă** în $x = c$, şi notăm **derivata** sa prin*

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Mulţimea tuturor funcţiilor derivabile pe (a, b) formează un spaţiu vectorial pe care îl notăm cu $C^1(a, b)$. Putem da definiţii similare pentru spaţiile vectoriale $C^2(a, b)$, $C^3(a, b)$, ..., $C^n(a, b)$, ..., $C^\infty(a, b)$, în care derivatele de ordin superior se definesc ca limite ale rapoarteler incrementare ale derivatelor de ordin inferior cu o unitate.

Spaţiile vectoriale introduse mai sus poartă denumirea de *clase*. Aşadar, spaţiului vectorial $C^2(a, b)$ îi vom spune *clasa funcţiilor reale, de o variabilă reală, de două ori diferenţiabile* pe (a, b).

Exemplul 11.1.1. *Funcţia*

$$f : (0, 2\pi) \to I\!R, \quad f(x) = \sin x$$

aparţine clasei $C^\infty(0, 2\pi)$.

Întradevăr, $f'(x) = \cos x$ şi $f''(x) = -\sin x = -f(x)$. De aici rezultă că funcţia f poate fi diferenţiată ori de câte ori dorim şi rezultatul va fi o funcţie continuă. Prin urmare, $f \in C^\infty(0, 2\pi)$. ■

Exemplul 11.1.2. *Funcţia $f : (-1, 1) \to I\!R : f(x) = x^2$ pentru $x \geq 0$, $f(x) = 0$ pentru $x < 0$ aparţine clasei $C^2(-1, 1)$.*

Exemplul 11.1.3. *Funcţia* $f : [0, 3] \to I\!R : f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru} \quad 0 \leq x < 1 \\ \cos x & \text{pentru} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ e^{-x} & \text{pentru} \quad 2 < x \leq 3, \end{cases}$ *aparţine clasei $PC[0, 3]$ deoarece nu este continuă în $x = 1$ şi $x = 2$.*

Observaţia 11.1.1. *Dacă f este diferenţiabilă în $c \in (a, b)$, ea este continuă în $x = c$. Afirmaţia reciprocă nu este adevărată. În acest sens, se poate da ca exemplu funcţia*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (n!)^2 x}{n!}$$

care este continuă pe $I\!R$, însă niciunde diferenţiabilă.

11.2 Original

Calculul operaţional se bazează pe realizarea unei corespondenţe între două mulţimi de funcţii: mulţimea funcţiilor numite *funcţii original* şi mulţimea *imaginilor* lor printr–o anumită *transformare*. Interesul pe care îl prezintă această corespondenţă se datoreşte faptului că operaţiilor de derivare şi integrare aplicate funcţiilor original le corespund anumite operaţii algebrice care se aplică imaginilor lor, aşa cum vom vedea în cele ce urmează.

Definiţia 11.2.1. *Se numeşte* **original** *o funcţie $f(t)$, reală sau complexă, definită pe mulţimea numerelor reale şi care satisface următoarele condiţii:*

1. $f(t) = 0$ *pentru* $t < 0$;
2. $f(t)$ *este derivabilă pe porţiuni;*
3. *Există două numere* $M_0 > 0$ *şi* s_0 *astfel încât* $|f(t)| \le M_0 e^{s_0 t}$.

Definiţia 11.2.2. *Numărul* s_0 *se numeşte* **indice de creştere** *al funcţiei original* $f(t)$. *În cazul în care* s_0 *este definit ca*

$$s_0 = \inf\{s \,:\, \exists M > 0 \text{ astfel încât } |f(t)| < M_0 e^{st}, \forall t \in I\!R\}$$

atunci el se numeşte **indicele de creştere** *al funcţiei original* $f(t)$.

Metodele operaţionale se referă la rezolvarea unor probleme în care mărimea fizică reprezentată prin $f(t)$ are proprietatea că sau este nulă înainte de momentul iniţial $t = 0$, sau valorile sale pentru $t < 0$ nu prezintă interes. Cu această motivaţie, prima condiţie din Definiţia 11.2.1 nu mai pare artificială.

Cea mai simplă funcţie original este *funcţia unitate*

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad t < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{pentru} \quad t = 0 \\ 1 & \text{pentru} \quad t > 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Indicele de creştere este $s_0 = 0$. Această funcţie poate fi reprezentată prin integrala

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z}\, dz, \tag{11.2}$$

unde a este un număr real pozitiv.

Funcţia unitate este importantă mai ales datorită faptului că dată fiind o funcţie $\varphi(t)$ definită pe toată axa reală şi îndeplinind ultimele două condiţii din Definiţia 11.2.1, funcţia

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad t < 0 \\ \dfrac{1}{2}\varphi(0) & \text{pentru} \quad t = 0 \\ \varphi(t) & \text{pentru} \quad t > 0 \end{cases}$$

este o funcţie original.

În cele ce urmează vom considera toate funcţiile de o variabilă reală înmulţite în prealabil cu funcţia unitate. Pentru simplicitatea scrierii vom nota cu acelaşi simbol funcţia şi înainte şi după înmulţirea cu funcţia unitate. De exemplu, prin funcţia $f(t) = \sin \omega t$ înţelegem funcţia

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad t < 0 \\ \sin \omega t & \text{pentru} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Teorema 11.2.1. *Suma şi produsul a două funcţii original sunt funcţii original.*

Demonstraţie. Într–adevăr, fie $f(t)$ şi $g(t)$ două funcţii original. Suma şi produsul lor

$$f(t)+g(t), \quad f(t)\cdot g(t)$$

îndeplinesc primele două condiţii. Din inegalităţile

$$|f(t)|\le M_1 e^{s_1 t}, \quad |g(t)|\le M_2 e^{s_2 t}$$

rezultă

$$|f(t)+g(t)|\le |f(t)|+|g(t)|\le 2Me^{s_0\,t},$$

unde M este cel mai mare dintre numerele M_1 şi M_2, iar s_0 este cel mai mare dintre indicii de creştere s_1 şi s_2. De asemenea,

$$|f(t)\cdot g(t)| = |f(t)|\cdot|g(t)|\le M_1\cdot M_2 e^{(s_1+s_2)t}.$$

Teorema este demonstrată. **q.e.d.**

Exemplul 11.2.1. *Funcţia* $e^{\lambda\,t}$*, unde* $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$*, este o funcţie original care are indicele de creştere* $s_0=\lambda_1$.

Exemplul 11.2.2. *Funcţia constantă* $f(t)=c$*, pentru* $t>0$*,* $f(t)=0$*, pentru* $t<0$ *şi* $f(0)=\dfrac{1}{2}c$ *este o funcţie original cu indicele de creştere* $s_0=0$.

Exemplul 11.2.3. *Funcţiile* $\sin\omega t$*,* $\cos\omega t$*,* $\sinh\omega t$ *şi* $\cosh\omega t$ *sunt funcţii original.*

Într-adevăr, folosind exprimările acestor funcţii cu ajutorul funcţiei exponenţiale

$$\begin{cases} \sin\omega t = \dfrac{e^{i\omega\,t}-e^{-i\omega\,t}}{2i}, & \cos\omega t = \dfrac{e^{i\omega\,t}+e^{-i\omega\,t}}{2}, \\ \sinh\omega t = \dfrac{e^{\omega\,t}-e^{-\omega\,t}}{2}, & \cosh\omega t = \dfrac{e^{\omega\,t}+e^{-\omega\,t}}{2}, \end{cases} \tag{11.3}$$

din Exemplul 11.2.1 şi Teorema 11.2.1 rezultă că aceste funcţii sunt funcţii original. ■

Exemplul 11.2.4. *Funcţia* t^n*, cu* n *număr natural, este, de asemenea, o funcţie original.*

Într-adevăr, verificarea se face uşor. Pentru a arăta că a treia condiţie este satisfăcută, se consideră dezvoltarea în serie a funcţiei $e^{\alpha t}$, cu $\alpha>0$ arbitrar. Avem

$$e^{\alpha t}=1+\frac{\alpha t}{1!}+\frac{\alpha^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha^n t^n}{n!}+\ldots,$$

din care deducem, pentru $t>0$,

$$\frac{\alpha^n t^n}{n!}<e^{\alpha t},$$

deci

$$t^n < \frac{n!}{\alpha^n} e^{\alpha t}.$$

Rolul lui M îl are $\dfrac{n!}{\alpha^n}$, iar indicele de creştere este α. ■

Exemplul 11.2.5. *Funcţiile*

$$t^n e^{\lambda t}, \qquad t^n \sin \omega t, \qquad t^n \cos \omega t,$$
$$t^n e^{\lambda t} \sin \omega t, \qquad t^n e^{\lambda t} \cos \omega t, \quad e^{\lambda t}[P(t)\cos \omega t + Q(t) \sin \omega t],$$

cu $P(t)$ şi $Q(t)$ polinoame, sunt funcţii original.

Într-adevăr, din Teorema 11.2.1 şi exemplele anterioare, rezultă că aceste funcţii sunt funcţii original. ■

11.3 Definiţia transformării Laplace. Imagine

Fie $f(t)$ o funcţie original având indicele de creştere s_0.

Definiţia 11.3.1. *Funcţia definită prin relaţia*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \qquad p = s + i\sigma, \tag{11.4}$$

se numeşte **imaginea după Laplace** *a funcţiei $f(t)$ sau* **transformata Laplace** *a funcţiei $f(t)$.*

Domeniul în care funcţia $F(p)$ este definită este prezentat de teorema următoare.

Teorema 11.3.1. *Imaginea $F(p)$ a funcţiei $f(t)$ este determinată în semiplanul $s > s_0$ şi este o funcţie olomorfă în acest semiplan. Derivata sa $F'(p)$ se obţine derivând în raport cu p funcţia de sub semnul de integrare*

$$F'(p) = \int_0^\infty [-t\, f(t)] e^{-pt} dt. \tag{11.5}$$

Demonstraţie. Integralele improprii (11.4) şi (11.5) sunt absolut convergente în semiplanul $s > s_0$. Într-adevăr,

$$\int_0^l |f(t)e^{-pt}| dt = \int_0^l |f(t)|\, |e^{-pt}| dt \le M \int_0^l e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}[1 - e^{-(s-s_0)\, l}\,].$$

Trecând la limită pentru $l \to \infty$, în ipoteza că $s > s_0$, rezultă $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)e^{-pt}| dt \le \frac{M}{s-s_0}$. Deci, integrala (11.4) este absolut convergentă şi

$$|F(p)| \le \frac{M}{s - s_0}. \tag{11.6}$$

În mod asemănător se demonstrează că integrala improprie (11.5) este absolut convergentă în semiplanul $s > s_0$.

Să demonstrăm acum că $F(p)$ este monogenă în orice punct p din semiplanul $s > s_0$. Pentru aceasta considerăm un cerc C cu centrul în p, conţinut în semiplanul $s > s_0$ şi fie z un punct din interiorul cercului.

Urmărim să evaluăm raportul incrementar al funcţiei F, în punctul p, corespunzător creşterii $z-p$ a argumentului. Numărătorul acestui raport este $F(z)-F(p)=\int_0^\infty f(t)(e^{-zt}-e^{-pt})dt.$

Diferenţa de sub semnul integrală o evaluăm cu ajutorul formulei lui Taylor cu rest de ordin unu sub formă integrală $e^{-zt}-e^{-pt}=-te^{-pt}(z-p)+(z-p)^2\,R(z,p,t)$, unde restul este dat de integrala

$$R(z,p,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{-t\zeta}\,d\zeta}{(\zeta-p)^2[\zeta-p-(z-p)]}.$$

Folosind această dezvoltare, putem scrie

$$\frac{F(z)-F(p)}{z-p}=\int_0^\infty[-t\,f(t)]e^{-pt}dt+(z-p)\int_0^\infty R(z,p,t)\,f(t)dt. \tag{11.7}$$

Vom arăta că ultimul termen tinde la zero când z tinde către p. Pentru aceasta pornim de la inegalitatea

$$|R(z,p,t)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{|e^{-t\zeta}|\,|d\zeta|}{|\zeta-p|^2|\zeta-p-(z-p)|}$$

şi ţinem cont că $|e^{-\zeta\,t}|=|e^{-(\xi+i\eta)t}|=e^{-\xi t}\le e^{-s_1t}$, unde s_1 este cea mai mică abscisă a punctului arbitrar ζ de pe cerc. Dacă notăm cu ρ raza cercului, iar $r=|z-p|$, atunci:

$$|\zeta-p|=\rho,\quad|\zeta-p-(z-p)|\ge|\zeta-p|-|z-p|=\rho-r;$$

$$|R(z,p,t)|\le\frac{e^{-s_1t}}{\rho(\rho-r)}.$$

Cu acestea,

$$\Big|\int_0^\infty R(z,p,t)\,f(t)dt\Big|\le\frac{1}{\rho(\rho-r)}\int_0^\infty|f(t)|e^{-s_1t}dt.$$

Datorită inegalităţii pe care o satisface funcţia original $f(t)$ (Definiţia 11.2.1), deoarece $s_1>s_0$, obţinem

$$|\int_0^\infty R(z,p,t)f(t)dt|\le\frac{M}{\rho(\rho-r)}\int_0^\infty e^{-(s_1-s_0)t}dt=\frac{M}{\rho(\rho-r)}\frac{1}{s_1-s_0}$$

Folosind această inegalitate, se observă că ultimul termen din (11.7) tinde către zero când z tinde către p astfel că

$$\lim_{z\to p}\frac{F(z)-F(p)}{z-p}=\int_0^\infty[-t\,f(t)]e^{-pt}dt.$$

Deci, funcţia $F(p)$ este monogenă în semiplanul $s>s_0$ iar derivata sa are expresia (11.5). **q.e.d.**

Exemplul 11.3.1. *Imaginea funcţiei unitate* $\eta(t)$ *este* $\dfrac{1}{p}$.

Soluţie. Conform formulei (11.4), trebuie calculată integrala

$$\int_0^\infty\eta(t)e^{-pt}dt=\Big[-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big]_0^\infty=\frac{1}{p}$$

deoarece

$$|e^{-pt}|=|e^{-(s+i\sigma)t}|=e^{-st}$$

şi pentru $s>0$, $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-pt}=0$. ■

Exemplul 11.3.2. *Imaginea funcţiei original* $f(t) = e^{\lambda t}$ *este funcţia* $F(p) = \dfrac{1}{p-\lambda}$, *definită pentru* $Re\,p > 0$.

Soluţie. Din Exemplul 11.2.1 se ştie că dacă partea reală a numărului complex $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ este nenegativă, indicele de creştere al funcţiei original $f(t)$ este $s_0 = \lambda_1$, iar dacă $\lambda_1 < 0$, atunci $s_0 = 0$. Funcţia $F(p)$ este definită în semiplanul $s > s_0$. Avem

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\lambda)t} dt = -\Big[\frac{1}{p-\lambda} e^{-(p-\lambda)t}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{p-\lambda}$$

deoarece

$$|e^{-(p-\lambda)t}| = |e^{-(s+i\sigma)t}| = e^{-(s-\lambda_1)t}$$

şi pentru $s > s_0 \geq \lambda_1$, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-(p-\lambda)t} = 0$. ■

11.4 Transformarea Laplace inversă. Formula Mellin–Fourier

Am văzut că, dată fiind o funcţie original $f(t)$, imaginea sa $F(p)$ prin transformarea Laplace (11.4) este complet determinată.

Se pune problema inversă, să se determine originalul $f(t)$ când se cunoaşte imaginea sa $F(p)$. Răspunsul este dat de teorema următoare:

Teorema 11.4.1. *Dacă* $f(t)$ *este o funcţie original cu indicele de creştere* s_0, *iar* $F(p)$ *este imaginea sa, atunci egalitatea*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{p\,t}\,dp, \quad a > s_0 \tag{11.8}$$

are loc în toate punctele în care funcţia $f(t)$ *este continuă.*

În fiecare punct c *de discontinuitate, valoarea funcţiei din membrul drept este egală cu*

$$\frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} e^{-a\,t}[f(t-0) + f(t+0)],$$

egală cu $e^{-a\,t} f(t)$ pe mulţimea punctelor în care funcţia este continuă. În orice interval mărginit, $\varphi(t)$ nu poate avea decât puncte de discontinuitate de prima speţă în număr finit, punctele în care $f(t)$ este discontinuă. Valoarea funcţiei $\varphi(t)$ într–un punct de discontinuitate este egală cu media limitelor sale laterale în acelaşi punct.

Observăm că funcţia $\varphi(t)$ are următoarele proprietăţi:

1. este derivabilă pe porţiuni;
2. în fiecare punct c de discontinuitate, $\varphi(c) = \dfrac{1}{2}[\varphi(c-0) + \varphi(c+0)]$;
3. este absolut integrabilă pe intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Primele două proprietăţi sunt evidente.

A treia proprietate se demonstrează imediat.

Deoarece $f(t)$ este o funcţie original, $\varphi(t) = 0$ pentru $t < 0$ şi rămâne să demonstrăm că $\varphi(t)$ este absolut integrabilă pe $(0, \infty)$. Pe acest interval, datorită inegalităţii pe care o satisface funcţia $f(t)$ ca funcţie original (vezi cel de al treilea punct din Definiţia 11.2.1), în toate punctele în care $\varphi(t)$ este continuă,

$$|\varphi(t)| = e^{-a\,t}|f(t)| \leq Me^{-(a-s_0)t},$$

şi pentru $a > s_0$ integrala funcţiei $Me^{-(a-s_0)t}$ pe intervalul $(0, \infty)$ este convergentă. De aici rezultăc şi $\varphi(t)$ este absolut integrabilă pe $(0, \infty)$.

Comparând cele trei propoziţii ale funcţiei $\varphi(t)$ cu condiţiile dintr–o teoremă enunţată la Capitolul Integrala Fourier, observăm că numai prima diferă. Se poate demonstra că, datorită celor trei proprietăţi de mai sus, $\varphi(t)$ poate fi reprezentată printr–o integrală Fourier. Avem

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-a\,\tau}e^{\,i\sigma(t-\tau)}\,d\tau$$

deoarece $\varphi(t) = 0$ pentru $t < 0$. De aici rezultă

$$e^{\,a\,t}\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+i\sigma)t}\,d\sigma \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-(a+i\sigma)\tau}\,d\tau.$$

Cu schimbarea de variabilă $p = a + i\sigma$ deducem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}dp \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau = e^{at}\varphi(t) = \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)].$$

Ţinând seama de (11.4), această egalitate se reduce la (11.8) şi teorema este demonstrată. **q.e.d.**

Egalitatea (11.8) se numeşte *formula lui Mellin–Fourier* şi reprezintă *inversa transformării* (11.4).

11.5 Proprietăţi ale transformării Laplace

11.5.1 Proprietatea de liniaritate

În tot cursul expunerii vom nota funcţiile original cu litere mici ale alfabetului latin

$$f(t), \quad g(t), \quad h(t), \cdots$$

şi mulţimea imaginilor lor cu litera mare corespunzătoare

$$F(p), \quad G(p), \quad H(p), \cdots$$

Transformările Laplace de forma (11.4) le vom nota prescurtat

$$F(p) = \mathcal{L}f(t), \quad G(p) = \mathcal{L}g(t), \quad H(p) = \mathcal{L}h(t), \cdots$$

iar transformarea inversă (11.8) o vom scrie

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(p), \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}G(p), \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}H(p), \cdots$$

Teorema 11.5.1. *Transformarea Laplace este o transformare liniară*

$$\begin{cases} \mathcal{L}[f(t)+g(t)] & = & \mathcal{L}f(t)+\mathcal{L}g(t) \\ \mathcal{L}[kf(t)] & = & k\,\mathcal{L}f(t), \quad k = constant. \end{cases} \tag{11.9}$$

Demonstraţie. Am arătat la începutul capitolului că dacă $f(t)$ şi $g(t)$ sunt funcţii original, atunci şi funcţiile $f(t)+g(t)$, $kf(t)$ sunt funcţii original. Avem

$$\int_0^\infty [f(t)+g(t)]e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt + \int_0^\infty g(t)e^{-pt}dt$$

$$\int_0^\infty k\,f(t)e^{-pt}dt = k\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Aceste egalităţi coincid cu (11.9). **q.e.d.**

Exerciţiul 11.5.1. *Folosind Exemplul 11.3.2 să se determine transformatele Laplace ale funcţiilor original:*

$$\sin\omega t; \quad \cos\omega t; \quad \sinh\omega t; \quad \cosh\omega t.$$

Soluţie. În Exemplul 11.3.2 s–a arătat că

$$\mathcal{L}e^{\lambda t} = \frac{1}{p-\lambda}. \tag{11.10}$$

Folosind proprietatea de liniaritate (11.9) şi (11.3), rezultă

$$\mathcal{L}\sin\omega t = \frac{1}{2i}(\mathcal{L}e^{i\omega t} - \mathcal{L}e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\Big)$$
$$\mathcal{L}\cos\omega t = \frac{1}{2}(\mathcal{L}e^{i\omega t} + \mathcal{L}e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\Big),$$

deci

$$\mathcal{L}\sin\omega t = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\cos\omega t = \frac{p}{p^2+\omega^2}. \tag{11.11}$$

În mod analog se deduc egalităţile

$$\mathcal{L}\sinh\omega t = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\cosh\omega t = \frac{p}{p^2-\omega^2}. \tag{11.12}$$

■

11.5.2 Teorema asemănării

Fie $f(t)$ o funcţie original şi α o constantă strict pozitivă. Se constată uşor că funcţia $\varphi(t) = f(\alpha t)$ este, de asemenea, o funcţie original. Înlocuirea variabilei t cu αt revine, evident, la o schimbare a unităţii pe axa variabilei.

Teorema 11.5.2. *Dacă $F(p)$ este imaginea funcţiei $f(t)$, oricare ar fi constanta $\alpha > 0$, avem*

$$\mathcal{L}f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}F\Big(\frac{p}{\alpha}\Big). \tag{11.13}$$

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$\mathcal{L}f(\alpha t) = \int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt$$

şi făcând schimbarea de variabilă $\alpha t = \theta$, obţinem

$$\mathcal{L}f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\theta)e^{-\frac{p}{\alpha}\theta}\,d\theta = \frac{1}{\alpha}\,F\Big(\frac{p}{\alpha}\Big).$$

Folosind această teoremă se pot determina imaginile altor funcţii. **q.e.d.**

Exerciţiul 11.5.2. *Cunoscând că imaginea funcţiei $f(t) = \sin t$ este $F(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$, să se determine imaginea funcţiei $f(\omega t) = \sin\omega t$, unde $\omega > 0$.*

Soluţie. Aplicând formula (11.13), avem $\mathcal{L}\sin\omega t = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{1}{\Big(\dfrac{p}{\omega}\Big)^2+1} = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Vezi şi Exerciţiul 11.5.1. ■

11.5.3 Teorema întârzierii

Dacă în funcţia original $f(t)$ înlocuim pe t cu $t-\tau$, unde τ este o constantă pozitivă, obţinem o nouă funcţie original, $f(t-\tau)$, care este nulă pentru $t-\tau<0$ şi ia aceleaşi valori ca şi $f(t)$, însă cu întârzierea τ.

Teorema 11.5.3. *Întârzierea τ se traduce prin înmulţirea imaginii cu $e^{-p\tau}$,*

$$\mathcal{L}f(t-\tau) = e^{-p\tau}\cdot\mathcal{L}f(t). \tag{11.14}$$

Demonstraţie. Formula (11.14) rezultă imediat. Ţinând seama că $f(t-\tau) = 0$ pentru $t<\tau$, avem

$$\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt.$$

Cu schimbarea de variabilă $t-\tau=\theta$, ultima integrală devine

$$\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(\theta)e^{-p(\tau+\theta)}\,d\theta = e^{-p\,\tau}\int_0^\infty f(\theta)e^{-p\theta}\,d\theta$$

şi egalitatea (11.14) este demonstrată. **q.e.d.**

Exerciţiul 11.5.3. (**Funcţia δ a lui Dirac**) *Să se determine imaginea funcţiei*

$$f(t)=\begin{cases} k & \textit{pentru} \quad a<t<b \\ 0 & \textit{pentru} \quad t<a \qquad \textit{şi pentru} \quad t>b \\ \dfrac{k}{2} & \textit{pentru} \quad t=a \qquad \textit{şi pentru} \quad t=b. \end{cases}$$

Soluţie. Această funcţie se mai poate scrie în forma

$$f(t)=k[\eta(t-a)-\eta(t-b)]. \tag{11.15}$$

Reprezentarea sa grafică se compune din reuniunea următoarei succesiuni de mulţimi: semidreapta $(-\infty,a)$; punctul de coordonate $(a,\dfrac{k}{2})$, segmentul de dreaptă deschis $\{(x,k):a<x<b\}$, paralel cu axa Ox; punctul $(b,\dfrac{k}{2})$; şi semidreapta $(b,+\infty)$.

Conform Teoremei 11.5.1 şi Teoremei 11.5.3, imaginea funcţiei (11.15) este

$$F(p)=\frac{k}{p}(e^{-ap}-e^{-bp}). \tag{11.16}$$

În cazul particular $a=0, b=h, k=\dfrac{1}{h}$, avem funcţia original

$$\delta_h(t)=\frac{1}{h}[\eta(t)-\eta(t-h)] \tag{11.17}$$

reprezentată grafic ca succesiunea de mulţimi: semiaxa deschisă negativă a axei Ox; punctul de coordonate $(0,\dfrac{h}{2})$; segmentul de dreaptă deschis $\{(x,\dfrac{1}{h}):0<x<h\}$, paralel cu axa Ox; punctul $(h,\dfrac{h}{2})$; şi semidreapta deschisă $(h,+\infty)$.

Funcţia (11.17) are proprietatea

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_h(t)dt=\int_0^h\frac{1}{h}dt=1,$$

iar imaginea ei este

$$F_h(p)=\frac{1}{hp}(1-e^{-hp}).$$

Se observă uşor că limita funcţiei (11.17), în sensul obişnuit, pentru $h\to 0$, nu există. Se consideră totuşi funcţia improprie, notată cu

$$\delta(t)=\eta'(t)$$

care ia valoarea zero pentru toate valorile reale ale lui t, cu excepţia punctului $t=0$, în care $\delta(t)$ ia valoarea infinită şi având proprietatea că

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1.$$

Această funcţie se numeşte *funcţia delta a lui Dirac* sau *funcţia impuls de ordin zero.*

Se spune că

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\delta_h(t)$$

şi că imaginea sa este limita imaginii funcţiei $\delta_h(t)$ pentru $h\to 0$,

$$\lim_{h\to 0}F_h(p)=1,$$

ceea ce înseamnă

$$\mathcal{L}\delta(t)=1,$$

deşi funcţia $\delta(t)$ nu este o funcţie original în sensul Definiţiei 11.2.1 şi nici $F(p)=1$ nu este o imagine în sensul Definiţiei 11.3.1. ■

11.5.4 Teorema deplasării

Fie $f(t)$ o funcţie original având indicele de creştere s_0 şi $F(p)$ imaginea sa. Trecerea lui p în $p-q$, unde q este o constantă, poate fi interpretată ca o *deplasare*, adică o *translaţie*, care aduce originea în punctul q.

Teorema 11.5.4. *Deplasarea originii din planul variabilei p în q se traduce prin înmulţirea originalului cu e^{qt}*

$$F(p-q) \quad = \quad \mathcal{L}[e^{qt} f(t)]. \tag{11.18}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, din (11.4) deducem

$$F(p-q) \quad = \quad \int_0^\infty f(t)e^{-(p-q)t}dt \quad = \quad \int_0^\infty [e^{qt}f(t)]e^{-pt}dt.$$

În ultima integrală, rolul funcţiei $f(t)$ din (11.4) îl are $e^{qt}f(t)$ cu indicele de creştere s_0+Re(q). Funcţia $F(p-q)$ este olomorfă în semiplanul $s > s_0$+Re(q). **q.e.d.**

Exerciţiul 11.5.4. *Să se arate că:*

$$\mathcal{L}e^{\lambda t}\sin\omega t = \frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}e^{\lambda t}\cos\omega t = \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}; \tag{11.19}$$

$$\mathcal{L}e^{\lambda t}\sinh\omega t = \frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}, \qquad \mathcal{L}e^{\lambda t}\cosh\omega t = \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}. \tag{11.20}$$

Soluţie. Pornind de la egalităţile (11.11) şi (11.12) şi aplicând Teorema 11.5.4 se obţin (11.19) şi (11.20).■

11.5.5 Derivarea originalului

Presupunem că $f(t)$ şi derivatele sale sunt funcţii original şi fie $F(p)$ imaginea funcţiei $f(t)$.

Teorema 11.5.5. *Imaginea derivatei $f'(t)$ este*

$$\mathcal{L}f'(t) = pF(p) - f(0+). \tag{11.21}$$

În general,

$$\mathcal{L}f^{(n)}(t) = p^nF(p) - [p^{n-1}f(0+) + p^{n-2}f'(0+) + ... + pf^{(n-2)}(0+) + f^{(n-1)}(0+)], \tag{11.22}$$

unde $f(0+), f'(0+), ..., f^{(n-2)}(0+), f^{(n-1)}(0+)$ sunt limitele la dreapta în origine ale respectiv funcţiilor $f(t)$, $f'(t), ..., f^{(n-2)}(t)$, $f^{(n-1)}(t)$.

Demonstraţie. Demonstrăm întâi egalitatea (11.21).

După Definiţia 11.3.1, avem $\mathcal{L}f'(t) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt$. Integrând prin părţi, obţinem

$$\mathcal{L}f'(t) = [f(t)e^{-pt}]\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{11.23}$$

Primul termen din membrul drept al egalităţii (11.23) se reduce la $-f(0+)$ deoarece, conform Definiţiei 11.2.1, avem

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-pt} \le Me^{-(s-s_0)t}, \quad s > s_0.$$

Deci, $\lim\limits_{t\to\infty} |f(t)e^{-pt}| = 0$, ceea ce atrage $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-pt} = 0$.

În acest fel, din (11.23) rămâne $\mathcal{L}f'(t) = -f(0+) + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$, din care rezultă că egalitatea (11.21) este demonstrată.

Observăm că egalitatea (11.21) se scrie şi în forma

$$\mathcal{L}f'(t) = p\mathcal{L}f(t) - f(0+). \tag{11.24}$$

Pentru a demonstra egalitatea (11.22), înlocuim $f'(t)$ din (11.24), pe rând, cu $f''(t)$, $f'''(t), f^{(4)}(t), \cdots$, $f^{(n)}(t)$. Avem

$$\begin{cases} \mathcal{L}f''(t) = p\mathcal{L}f'(t) - f'(0+) \\ \mathcal{L}f'''(t) = p\mathcal{L}f''(t) - f''(0+) \\ \mathcal{L}f^{(4)}(t) = p\mathcal{L}f'''(t) - f'''(0+) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{L}f^{(n)}(t) = p\mathcal{L}f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0+). \end{cases} \tag{11.25}$$

Înmulţim întâi în (11.24) cu p^{n-1}, apoi prima egalitate din (11.25) cu p^{n-2}, a doua cu p^{n-3}, a treia cu p^{n-4} şi aşa mai departe, ultima rămânând neschimbată.

Adunând rezultatele, obţinem egalitatea (11.22). **q.e.d.**

Observaţia 11.5.1. *Egalitatea (11.21), sau echivalenta ei (11.24), nu sunt adevărate în situaţia în care f are puncte de discontinuitate în $(0,\infty)$.*

Într–adevăr, să presupunem că f are un unic punct de discontinuitate în $(0,\infty)$, notat cu t_0. Atunci, ca mai sus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f'(t) &= \int_0^{t_0} f'(t)e^{-pt}dt + \int_{t_0}^\infty f'(t)e^{-pt}dt \\ &= f(t)e^{-pt}\Big|_0^{t_0} + f(t)e^{-pt}\Big|_{t_0}^\infty + p\int_0^{t_0} f(t)e^{-pt}dt \\ &= e^{-pt_0}(f(t_0-) - f(t_0+)) + p\mathcal{L}f(t) - f(0+), \end{aligned}$$

o egalitate asemănătoare obţinându–se pentru cazul mai multor puncte de discontinuitate. ■

Exerciţiul 11.5.5. *Cunoscând imaginea funcţiei $\cos\omega t$,*

$$\mathcal{L}\cos\omega t = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \tag{11.26}$$

să se deducă imaginea funcţiei $\sin\omega t$ folosind teorema de derivare a originalului.

Soluţie. Din Teorema 11.5.5 şi (11.26) avem

$$\mathcal{L}(-\omega\,\sin\omega t) = p\,\frac{p}{p^2+\omega^2} - 1 = \frac{-\omega^2}{p^2+\omega^2}.$$

Datorită proprietăţii de liniaritate, $-\omega$ poate fi scos în stânga operatorului $\mathcal{L}$ şi, simplificând cu $-\omega$, obţinem

$$\mathcal{L}\sin\omega t = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

rezultat pe care l–am stabilit şi în (11.11). ■

11.5.6 Derivarea imaginii

Egalitatea (11.5) se mai poate scrie

$$F'(p) = \mathcal{L}[-t\,f(t)]. \tag{11.27}$$

Funcţia $F(p)$, fiind olomorfă în semiplanul $s > s_0$, admite derivate de orice ordin în acest semiplan. Funcţia $t^n\,f(t)$, cu n număr natural, este o funcţie original cu indicele de creştere $s_0+\alpha$, unde α este un număr strict pozitiv la voia noastră de mic.

Din aproape în aproape se obţine

$$F^{(n)}(p) = \mathcal{L}[\,(-t)^n f(t)]. \tag{11.28}$$

Această proprietate poate fi enunţată astfel:

Teorema 11.5.6. *Derivarea imaginii se traduce prin înmulţirea originalului cu* $-t$.

Exemplul 11.5.1. *Pornind de la egalitatea (11.10) şi aplicând Teorema 11.5.6, obţinem*

$$\mathcal{L}(te^{\lambda t}) = \frac{1}{(p-\lambda)^2}, \qquad \mathcal{L}(t^n e^{\lambda t}) = \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}. \tag{11.29}$$

Dacă în ultima egalitate facem $\lambda = 0$ *şi împărţim cu* $n!$, *obţinem*

$$\mathcal{L}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{p^{n+1}}. \tag{11.30}$$

Exerciţiul 11.5.6. *Să se arate că au loc egalităţile:*

$$\begin{cases} \mathcal{L}(t\sin\omega t) = \dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, & \mathcal{L}(t\cos\omega t) = \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2} \\[2ex] \mathcal{L}(t\sinh\omega t) = \dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}, & \mathcal{L}(t\cosh\omega t) = \dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}; \end{cases} \tag{11.31}$$

$$\mathcal{L}(te^{\lambda t}\sin\omega t) = \frac{2\omega(p-\lambda)}{[(p-\lambda)^2+\omega^2]^2}, \quad \mathcal{L}(te^{\lambda t}\cos\omega t) = \frac{(p-\lambda)^2-\omega^2}{[(p-\lambda)^2+\omega^2]^2}; \tag{11.32}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(te^{\lambda t}\sinh\omega t) = \dfrac{2\omega(p-\lambda)}{[(p-\lambda)^2-\omega^2]^2} \\[2ex] \mathcal{L}(te^{\lambda t}\cosh\omega t) = \dfrac{(p-\lambda)^2+\omega^2}{[(p-\lambda)^2-\omega^2]^2}. \end{cases} \tag{11.33}$$

Soluţie. Dacă se folosesc relaţiile (11.11), (11.12) şi se aplică totodată (11.27) se deduc toate egalităţile (11.31).

De asemenea, din (11.20), (11.20) şi Teorema 11.5.6 rezultă (11.32) şi (11.33). ■

11.5.7 Integrarea originalului

Prin integrarea funcţiei original $f(t)$ se înţelege operaţia $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$, în urma căreia se obţine o nouă funcţie original pe care o notăm cu $g(t)$. Într-adevăr, funcţia

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau \tag{11.34}$$

îndeplineşte cele trei condiţii din Definiţia 11.2.1, primele două fiind evidente. Pentru a treia, vom scrie

$$|g(t)| = \Big|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\Big| \le \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau$$

şi ţinând seama de condiţia a treia din Definiţia 11.2.1 a funcţiei f, avem

$$|g(t)| = M\int_0^t e^{\,s_0\tau}\,d\tau = \frac{M}{s_0}(e^{\,s_0 t} - 1) \le \frac{M}{s_0}e^{\,s_0 t}$$

ceea ce arată că funcţiile f şi g au acelaşi indice de creştere.

Să notăm, ca de obicei

$$F(p) = \mathcal{L}f(t), \qquad G(p) = \mathcal{L}g(t).$$

Teorema 11.5.7. *Integrarea originalului se traduce prin împărţirea imaginii sale cu* p,

$$\mathcal{L}\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{p}\,F(p). \tag{11.35}$$

Demonstraţie. Din (11.34) deducem următoarele:

$$g\,'(t) = f(t), \quad g(0) = 0.$$

Aplicând Teorema 11.5.5 şi ţinând cont că $\mathcal{L}g\,'(t) = \mathcal{L}f(t)$, obţinem $p\,G(p) = F(p)$ din care rezultă egalitatea (11.35). **q.e.d.**

Exerciţiul 11.5.7. *Pornind de la relaţia evidentă*

$$\sin^2\omega t = \omega\int_0^t \sin 2\omega\tau\,d\tau, \tag{11.36}$$

să se determine imaginea funcţiei $g(t) = \sin^2\omega t$.

Soluţie. În primul rând, putem determina imaginea funcţiei $\sin 2\omega t$. Pentru aceasta considerăm (11.11) şi trecem ω în 2ω. Avem

$$\mathcal{L}\sin 2\omega t = \frac{2\omega}{p^2 + 4\omega^2}.$$

Atunci, după (11.36) şi Teorema 11.5.7, deducem

$$\mathcal{L}\sin^2\omega t = \omega\,\mathcal{L}\int_0^t \sin 2\omega t dt = \frac{\omega}{p}\mathcal{L}\sin 2\omega t.$$

În acest mod, deducem

$$\mathcal{L}\sin^2\omega t = \frac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}.$$

Acest rezultat s-ar fi putut obţine folosind identitatea

$$\sin^2\omega t = \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t),$$

proprietatea de liniaritate a transformatei Laplace şi imaginea funcţiei $\cos 2\omega t$. Avem

$$\mathcal{L}\sin^2\omega t = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\eta(t) - \mathcal{L}\cos 2\omega t) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4\omega^2}\Big)$$

şi de aici se vede că se obţine acelaşi rezultat. ■

11.5.8 Integrarea imaginii

Fie $f(t)$ o funcţie original şi $F(p)$ imaginea sa. Să presupunem că integrala improprie

$$\int_0^\infty f(q)\,dq \tag{11.37}$$

este convergentă.

funcţia $F(p)$ este olomorfă în semiplanul $s > s_0$, deci admite o primitivă $\Phi(p)$ în acest semiplan şi

$$\int_p^{p_1} F(q)\,dq = \Phi(p_1) - \Phi(p)$$

oricare ar fi cele două puncte p şi p_1 din semiplanul $s > s_0$. dacă $\Phi(p)$ are în punctul de la infinit un punct ordinar, convergenţa integralei (11.37) este asigurată. În ipoteza că această proprietate are loc, obţinem

$$G(p) = \int_p^\infty f(q)\,dq = \Phi(\infty) - \Phi(p). \tag{11.38}$$

Vom spune că funcţia $G(p)$ s–a obţinut prin integrarea imaginii.

Teorema 11.5.8. *Integrarea imaginii se traduce prin împărţirea originalului corespunzător cu* t

$$\int_p^\infty f(q)\,dq = \mathcal{L}\frac{f(t)}{t}. \tag{11.39}$$

Demonstraţie. Prin derivare, din (11.38) rezultă

$$G'(p) = -F(p).$$

Fie $g(t)$ originalul funcţiei $G(p)$. Conform egalităţii (11.5) deducem de aici

$$-t\,g(t) = -f(t),$$

deci

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} \implies G(p) = \mathcal{L}\frac{f(t)}{t}$$

şi egalitatea (11.39) este demonstrată. **q.e.d.**

Exerciţiul 11.5.8. *Să se determine imaginile funcţiilor* $\dfrac{\sinh \omega t}{t}$ *şi* $\dfrac{\sin \omega t}{t}$.

Soluţie. Conform egalităţilor (11.11) şi (11.12),

$$\mathcal{L}\sinh \omega t = \frac{\omega}{p^2-\omega^2} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\Big], \qquad \mathcal{L}\sin \omega t = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Aplicăm Teorema 11.5.8 şi avem

$$\mathcal{L}\frac{\sinh \omega t}{t} = \frac{1}{2}\ln\frac{p-\omega}{p+\omega}, \tag{11.40}$$

$$\mathcal{L}\frac{\sin \omega t}{t} = \Big(\operatorname{arctg}\frac{q}{\omega}\Big)\Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{\omega}. \tag{11.41}$$

Se introduc tăieturile convenabile în planul variabilei p şi se consideră ramurile funcţiilor $\ln z$, $\operatorname{arctg} z$ care pe axa reală iau valorile cunoscute din analiza funcţiilor reale.

Prin integrarea originalului, în cazul $\omega = 1$, se obţine o funcţie importantă în aplicaţii

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau, \qquad t > 0, \tag{11.42}$$

care se numeşte *sinus integral* de t. Datorită egalităţilor (11.41) şi (11.35) obţinem

$$\mathcal{L}\operatorname{si} t = \frac{1}{p}\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p\Big). \tag{11.43}$$

În mod analog se defineşte funcţia *cosinus integral*,

$$\operatorname{ci} t = \int_{\infty}^t \frac{\cos\tau}{\tau}\, d\tau, \quad t > 0, \tag{11.44}$$

şi se demonstrează că imaginea sa este

$$\mathcal{L}\operatorname{ci} t = \frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{11.45}$$

■

11.5.9 Produsul a două imagini

Fie $f(t)$ şi $g(t)$ două funcţii original şi imaginile lor

$$F(p) = \mathcal{L}f(t) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \qquad G(p) = \mathcal{L}g(t) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-pt}dt.$$

Definiţia 11.5.1. *Se numeşte* **produsul de convoluţie** *al funcţiilor* f *şi* g, *sau* **convoluţia** *funcţiilor* f *şi* g, *funcţia*

$$\varphi(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau. \tag{11.46}$$

Teorema 11.5.9. (**Borel**) Produsul $F(p)\,G(p)$ este tot o imagine, şi anume

$$F(p)\,G(p) \quad = \quad \mathcal{L}\varphi(t) \quad = \quad \mathcal{L}(f*g)(t) \quad = \quad \mathcal{L}\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau. \tag{11.47}$$

Demonstraţie. Să remarcăm că în locul lui (11.4), se poate scrie

$$F(p)=\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\,\tau}\,d\tau$$

Prin înmulţirea ambilor membri cu $G(p)$, obţinem $F(p)G(p)=\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\,\tau}G(p)\,d\tau.$

Conform Teoremei întârzierii 11.5.3,

$$e^{-p\,\tau}G(p)=\mathcal{L}g(t-\tau)=\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-pt}dt.$$

Deci,

$$F(p)\,G(p)=\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty f(\tau)\,g(t-\tau)e^{-pt}dt. \tag{11.48}$$

Dar, $f(t)$ şi $g(t)$ fiind funcţii original, ordinea de integrare poate fi schimbată, astfel că putem scrie

$$F(p)G(p)=\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^\infty f(\tau)\,g(t-\tau)d\tau. \tag{11.49}$$

Cum funcţia $g(t)$ este un original, $g(t-\tau)=0$ pentru $t-\tau<0$, adică pentru $\tau>t$. Avem

$$\int_0^\infty f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau+\int_t^\infty f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

Folosind acest rezultat în (11.49), deducem egalitatea

$$F(p)G(p)=\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^\infty\Big(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\Big)e^{-pt}dt,$$

care este aceeaşi cu (11.47). **q.e.d.**

Corolarul 11.5.1. *În condiţiile Teoremei 11.5.9, are loc egalitatea*

$$p\,F(p)\,G(p)=\mathcal{L}\Big(f(t)\,g(0)+\int_0^t f(\tau)\,g'(t-\tau)\,d\tau\Big) \tag{11.50}$$

cunoscută sub numele de **formula lui Duhamel**.

Demonstraţie. Folosind regula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de un parametru, care poate să apară şi în limitele de integrare, să derivăm funcţia original (11.46). Avem

$$\varphi'(t)=f(t)\,g(0)+\int_0^t f(\tau)\,g'(t-\tau)\,d\tau.$$

Teorema 11.5.5, de derivare a originalului, şi faptul că $\varphi(0)=0$ conduce la (11.50). **q.e.d.**

Observaţia 11.5.2. *Formula lui Duhamel (11.50) îşi găseşte deseori aplicaţii în electrotehnică.*

Exerciţiul 11.5.9. *Să se determine funcţia original a cărei imagine este* $\dfrac{1}{p\,(p^2+a^2)}$.

Soluţie. Vom prezenta două metode de rezolvare.

Prima din acestea porneşte de la faptul că imaginea dată se poate scrie în forma

$$\frac{1}{p(p^2+a^2)} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{a}{p^2+a^2} = \frac{1}{a}F(p)G(p),$$

unde:

$$F(p) = \frac{1}{p} = \mathcal{L}\eta(t); \quad G(p) = \frac{a}{p^2+a^2} = \mathcal{L}\sin at,$$

după care aplicăm (11.47). Conform acestei formule, avem

$$F(p)G(p) = \mathcal{L}\varphi(t) = \mathcal{L}(\eta(t)*\sin at) = \mathcal{L}\int_0^t \eta(\tau)\sin a(t-\tau)d\tau = \mathcal{L}\int_0^t \sin a(t-\tau)d\tau.$$

Efectuând integrarea, găsim

$$F(p)G(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(1-\cos at) = \frac{2}{a}\mathcal{L}\sin^2\frac{at}{2},$$

de unde deducem

$$\frac{1}{p(p^2+a^2)} = \mathcal{L}\Big(\frac{2}{a^2}\sin^2\frac{at}{2}\Big),$$

care mai departe conduce la concluzia finală

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p(p^2+a^2)} = \frac{2}{a^2}\sin^2\frac{at}{2}.$$

O a doua metodă de rezolvare a exerciţiului porneşte de la descompunerea imaginii în fracţiile simple

$$\frac{1}{p\,(p^2+a^2)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+a^2},$$

unde A, B, C sunt numere reale care se detrmină simplu. Obţinem

$$\frac{1}{p\,(p^2+a^2)} = \frac{1}{a^2}\Big(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+a^2}\Big). \tag{11.51}$$

În egalitatea (11.51) aplicăm transformarea Laplace inversă şi ţinem cont de Exemplul 11.3.1 şi de (11.11). Obţinem

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p\,(p^2+a^2)} = \frac{1}{a^2}(1-\cos at) = \frac{2}{a^2}\sin^2\frac{at}{2}.$$

Pentru $a = 2\omega$ se regăseşte rezultatul obţinut în Exerciţiul 11.5.7. ■

11.5.10 Produsul a două originale

Fie $f(t)$ şi $g(t)$ două funcţii original având respectiv indicii de creştere s_1 şi s_2. Conform Teoremei 11.2.1, produsul $f(t)\,g(t)$ este tot o funcţie original cu indicele de creştere s_1+s_2. Imaginea acestui produs este o funcţie Φ olomorfă în semiplanul $s > s_1+s_2$. Se pune problema determinării funcţiei $\Phi(p)$.

Fie $F(p)$ şi $G(p)$ imaginile funcţiilor $f(t)$ şi $g(t)$.

Teorema 11.5.10. *Imaginea produsului $f(t)g(t)$ este*

$$\Phi(p)=\mathcal{L}[f(t)\,g(t)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)\,G(p-q)\,dq,\quad a>s_1. \tag{11.52}$$

Demonstraţie. Din (11.8), prin înmulţire cu $g(t)$, obţinem

$$f(t)g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)e^{q\,t}g(t)dq.$$

Conform teoremei deplasării, avem $e^{q\,t}\,g(t)=\mathcal{L}^{-1}G(p-q)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}G(p-q)e^{p\,t}\,dp,\quad b>s_2+\mathrm{Re}\,(q).$ Introducem în egalitatea precedentă

$$f(t)\,g(t)=\Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)dq\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}G(p-q)e^{p\,t}\,dp.$$

Se poate arăta că putem schimba ordinea de integrare şi avem

$$f(t)\,g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)\,G(p-q)\,dq\Big]e^{p\,t}\,dp.$$

Comparând cu (11.8), rezultă egalitatea (11.52). **q.e.d.**

Observaţia 11.5.3. *Din inegalitatea $b>s_2+Re\,(q)$, ţinând seama că în procesul de integrare $Re\,(q)=a$, iar $a>s_1$, deducem*

$$b>s_1+s_2,$$

ceea ce este în acord cu faptul că indicele de creştere al produsului $f(t)\,g(t)$ este s_1+s_2. De asemenea, imaginea funcţiei $e^{q\,t}\,g(t)$, fiind determinată în semiplanul $Re\,(p)>s_2+Re\,(q)$, iar $Re\,(q)=a$ în procesul de integrare, urmează că imaginea produsului $f(t)\,g(t)$ este determinată în semiplanul

$$Re\,(p)>s_2+a. \tag{11.53}$$

Cum $a>s_1$ şi oricât de apropiat de s_1, inegalitatea (11.53) poate fi înlocuită cu $Re\,(p)>s_1+s_2$.

Exerciţiul 11.5.10. *Ca aplicaţie a Teoremei 11.5.10, să se determine imaginea produsului $\sin\omega t\cdot\sinh\omega t$.*

Soluţie. Întâi de toate, avem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\sin\omega t &= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, & s>s_1 &= |\mathrm{Re}\,(i\omega)|,\\ \mathcal{L}\sinh\omega t &= \frac{\omega}{p^2-\omega^2}, & s>s_2 &= |\mathrm{Re}\,(\omega)|.\end{aligned}$$

Introducem în (11.52)

$$\mathcal{L}(\sin\omega t\,\sinh\omega t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\omega}{q^2+\omega^2}\,\frac{\omega}{(p-q)^2-\omega^2}\,dq.$$

Aplicăm teorema reziduurilor pentru funcţia

$$\varphi(q)=\frac{\omega^2}{(q^2+\omega^2)[(p-q)^2-\omega^2]}$$

şi curba închisă formată din segmentul de dreaptă de extremităţi $a-il,\ a+il$ şi semicercul Γ cu centrul în a şi de rază $R=l,\ l>0,$ situat în stânga segmentului de dreaptă. Conform teoremei reziduurilor

$$\int_{a-il}^{a+il}\varphi(q)\,dq+\int_{\Gamma}\varphi(q)\,dq=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{rez}(\varphi,q_k).$$

Pentru $R\to\infty,$ prima integrală tinde către $\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\varphi(q)\,dq,$ iar integrala pe Γ tinde evident către zero.

funcţia $\varphi(q)$ are polii simpli $q=\pm i\omega$ situaţi la stânga dreptei $s=a,$ deoarece $a>s_1=|\mathrm{Re}\,(i\omega)|.$ Polii $q=p\pm\omega$ se află la dreapta acestei drepte deoarece, ţinând seama de (11.53) şi de faptul că $\mathrm{Re}\,(\omega)=s_2,$ avem

$$\mathrm{Re}\,(p\pm\,\omega)=\mathrm{Re}\,(p)\pm\,\mathrm{Re}\,(\omega)>s_2+a\pm\,s_2\geq a.$$

Prin urmare, avem de calculat doar reziduurile funcţiei $\varphi(q)$ în punctele $\pm\,i\omega.$

$$\begin{aligned}\mathrm{rez}(\varphi,i\omega)&=\left\{\frac{\omega^2}{2q[(p-q)^2-\omega^2]}\right\}_{q=i\omega}=\frac{\omega}{2i(p^2-2\omega^2-2p\,i\omega)}\\ \mathrm{rez}(\varphi,-i\omega)&=\left\{\frac{\omega^2}{2q[(p-q)^2-\omega^2]}\right\}_{q=-\,i\omega}=\frac{-\,\omega}{2i(p^2-2\omega^2+2p\,i\omega)}.\end{aligned}$$

Suma acestor reziduuri este $\dfrac{2p\omega^2}{p^4+4\omega^4}$, deci

$$\mathcal{L}(\sin\omega t\,\sinh\omega t)=\frac{2p\omega^2}{p^4+4\omega^4}.$$

Acest rezultat se mai poate obţine scriind $\sin\omega t\,\sinh\omega t=\dfrac{1}{2}\Big(e^{\omega t}\sin\omega t-e^{-\omega t}\sin\omega t\Big)$ şi aplicând teorema deplasării

$$\mathcal{L}(\sin\omega t\,\sinh\omega t)=\frac{1}{2}\Big[\frac{\omega}{(p-\omega)^2+\omega^2}-\frac{\omega}{(p+\omega)^2+\omega^2}\Big]=\frac{2p\omega^2}{p^4+4\omega^4}.$$

Comparând cele două metode de rezolvare, constatăm că a doua metodă este mult mai directă şi cu mult mai puţine calcule şi implicaţii teoretice. ■

11.5.11 Teoreme de dezvoltare

Pentru determinarea originalului $f(t),$ când se ştie imaginea sa $F(p),$ se folosesc uneori teoremele de dezvoltare.

Teorema 11.5.11. *Dacă $F(p)$ este o funcţia raţională $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$, în care gradul numărătorului este mai mic decândt gradul numitorului, iar numitorul $B(p)$ are rădăcinile simple $p_0,p_1,p_2,\cdots,p_n,$ atunci $F(p)$ este imaginea funcţiei*

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A(p_k)}{B\,'(p_k)}e^{\,p_k t}. \tag{11.54}$$

Demonstraţie. În ipotezele de mai sus, funcţia $F(p)$ admite o descompunere în fracţii simple de forma

$$F(p)=\frac{a_0}{p-p_0}+\frac{a_1}{p-p_1}+\frac{a_2}{p-p_2}+\cdots+\frac{a_n}{p-p_n}.$$

Coeficientul a_j se poate calcula integrând funcţia $F(p)$ pe un cerc Γ_j cu centrul în p_j şi de rază suficient de mică astfel ca în interiorul său să nu fie plasat un alt pol al funcţiei $F(p)$. Avem

$$\int_{\Gamma_j} F(p)\,dp=\sum_{k=0}^{n} a_k\int_{\Gamma_j}\frac{dp}{p-p_k}.$$

În virtutea teoremei lui Cauchy, $\displaystyle\int_{\Gamma_j}\frac{dp}{p-p_k}=0$ pentru $k\neq j$.

Când $k=j$, tot din teorema lui Cauchy avem $\displaystyle\int_{\Gamma_j}\frac{dp}{p-p_j}=2\pi i$, deci $\displaystyle\int_{\Gamma_j}F(p)\,dp=2\pi i a_j$.

Folosind teorema reziduurilor şi formula de calcul pentru reziduul relativ la un pol simplu, avem

$$\int_{\Gamma_j} F(p)\,dp=2\pi i\,\mathrm{rez}(F,p_j)=2\pi i\frac{A(p_j)}{B'(p_j)}.$$

Comparând cu egalitatea precedentă, deducem $a_j=\dfrac{A(p_j)}{B'(p_j)}$.

Cu aceasta, dezvoltarea funcţiei $F(p)$ devine

$$F(p)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\frac{1}{p-p_k}$$

iar originalul său are evident expresia (11.54). **q.e.d.**

Corolarul 11.5.2. *Dacă una din rădăcini este nulă, relaţia* (11.54) *devine*

$$f(t)=\frac{A(0)}{R(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{R'(p_k)}\frac{e^{p_k t}}{p_k},$$

unde $R(p)$ *este polinomul cu proprietatea*

$$B(p)=p\,R(p).$$

Demonstraţie. Să presupunem că rădăcina nulă este $p_0=0$. Atunci $B(p)=p\,R(p)\implies B'(p)=pR'(p)+R(p)$. Deoarece $R(p_k)=0;\ k=1,2,...,n,$ vom avea

$$B'(p_0)=B'(0)=R(0),$$
$$B'(p_k)=p_kR'(p_k).$$

Descompunerea lui $F(p)$ va lua forma $F(p)=\dfrac{A(0)}{R(0)}\dfrac{1}{p}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{p_k\,R'(p_k)}\frac{1}{p-p_k}$ şi (11.54) devine

$$f(t)=\frac{A(0)}{R(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{p_k\,R'(p_k)}e^{p_k t}. \qquad (11.55)$$

Această egalitate se numeşte *formula lui Heaviside.* **q.e.d.**

Observaţia 11.5.4. *Procedeul prin care am determinat originalul unei funcţii raţionale poate fi extins uşor şi pentru cazul când numitorul $B(p)$ are rădăcini multiple.*

Extinderea procedeului. Vom lua o constantă reală pozitivă a, mai mare decât toate părţile reale ale polilor p_k. Fie α_k multiplicitatea polului p_k.

Vom utiliza aceeaşi curbă închisă ca în paragraful precedent şi determinăm valoarea integralei pe această curbă din funcţia $\Phi(p) = F(p)e^{p\,t}$.

Considerând că raza l a cercului, din care face parte semicercul Γ, tinde la ∞ şi folosind (11.8), obţinem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{p\,t}\,dp = \sum_{k=1}^{h} \operatorname{rez}(\Phi, p_k)$$

unde $h \in I\!N^*$ este numărul polilor.

Folosim formula de calcul a reziduurilor în poli multipli şi deducem formula

$$f(t) = \sum_{k=1}^{h} \frac{1}{(\alpha_k - 1)!}\Big[(p-p_k)^{\alpha_k}\,F(p)e^{p\,t}\Big]^{(\alpha_k - 1)}_{p=p_k}$$

după care se determină originalul în cazul când polii funcţiei raţionale $F(p)$ sunt multipli. ■

O a doua teoremă de dezvoltare este

Teorema 11.5.12. *Dacă funcţia imagine $F(p)$ este olomorfă în afara unui cerc Γ cu centrul în origine şi rază R şi are în punctul de la infinit un punct ordinar, atunci dezvoltarea sa în serie Laurent este*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}, \qquad |p| > R, \tag{11.56}$$

şi $F(p)$ este imaginea funcţiei

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!}\,t^{n-1}. \tag{11.57}$$

Demonstraţie. Prin ipoteză, $F(p)$ este olomorfă în domeniul $|p| > R$. Deci, funcţia $\varphi(\zeta) = F\Big(\dfrac{1}{\zeta}\Big)$ este olomorfă în domeniul $|\zeta| < \dfrac{1}{R}$ şi admite dezvoltarea în serie Taylor

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots, |\zeta| < \frac{1}{R}.$$

Funcţia $F(p)$ are în punctul de la infinit un punct ordinar şi din inegalitatea (11.6) rezultă că într–o vecinătate a acestui punct $F(p)$ este mărginită şi prin urmare

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = 0,$$

deci $\varphi(0) = a_0 = 0$. Revenind la variabila p, obţinem dezvoltarea (11.56).

Conform egalităţii (11.30), termenul general al seriei (11.56) este imaginea funcţiei

$$\frac{a_n}{(n-1)!}\,t^{n-1}.$$

Considerăm seria de puteri formată cu originalele termenilor seriei (11.56),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n-1)!}\,t^{n-1}. \tag{11.58}$$

Vom demonstra că această serie este absolut şi uniform convergentă şi că suma sa este o funcţie original.

Datorită inegalităţilor lui Cauchy, $|a_n|\le\dfrac{M}{r^n}=M\,R^n$, $\Big|\dfrac{a_n}{(n-1)!}\,t^{n-1}\Big|\le M\,R\,\dfrac{(R\,t)^{n-1}}{(n-1)!}$, termenii seriei (11.58) nu depăşesc, în modul, termenii seriei

$$MR\cdot e^{Rt}=MR\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Rt)^{n-1}}{(n-1)!},\quad t>0,$$

despre care ştim că este absolut şi uniform convergentă pe intervalul $[0,L]$, unde L este la voia noastră de mare.

De aici rezultăc seria (11.58) este absolut şi uniform convergentă pe intervalul $[0,L]$, cu L oricândt de mare, şi că suma sa $f(t)$ are proprietatea

$$|f(t)|\le M\,Re^{\,R\,t},\quad t>0.$$

Prima condiţie din Definiţia 11.2.1 o considerăm îndeplinită de la sine, conform convenţiei adoptate. A doua condiţie este evident îndeplinită, deci funcţia (11.57) este un original.

Datorită convergenţei uniforme, seria (11.57), înmulţită în prealabil cu e^{-pt}, poate fi integrată termen cu termen pe intervalul $(0,\infty)$ şi obţinem funcţia (11.56).

Teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Exerciţiul 11.5.11. *Să se determine originalul funcţiei* $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$.

Soluţie. Folosim prima teoremă de dezvoltare, în care

$$A(p)=p,\qquad B(p)=(p^2+a^2)(p^2+b^2).$$

Polinomul $B(p)$ are numai rădăcini simple: $\pm\,ia,\pm\,ib$. Cu

$$\frac{A(p)}{B\,'(p)}=\frac{1}{2(2p^2+a^2+b^2)}$$

obţinem

$$f(t)=\frac{1}{2(b^2-a^2)}(e^{\,ia\,t}+e^{-ia\,t})+\frac{1}{2(a^2-b^2)}(e^{\,ib\,t}+e^{-ib\,t})$$

sau, cu o altă scriere, $f(t)=\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$. ■

Exerciţiul 11.5.12. *Să se determine originalul funcţiei*

$$F(p)=\frac{p+\lambda}{(p-a)^3(p-b)}$$

.

Soluţie. De data aceasta, $B(p)$ are o rădăcină triplă. Conform celor stabilite în Observaţia 11.5.4, avem

$$f(t) = \Big[\frac{p+\lambda}{(p-a)^3}e^{p\,t}\Big]_{p=b} + \frac{1}{2!}\Big[\frac{p+\lambda}{p-b}e^{p\,t}\Big]''_{p=a}.$$

Făcând calculele, se obţine

$$f(t) = \frac{b+\lambda}{(b-a)^3}e^{b\,t} + \Big[\frac{b+\lambda}{(a-b)^3} - \frac{b+\lambda}{(a-b)^2}t + \frac{1}{2}\frac{a+\lambda}{a-b}t^2\Big]e^{a\,t}.$$

■

Exerciţiul 11.5.13. *Precizaţi originalul funcţiei* $F(p) = \dfrac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}$, *unde* n *este un întreg pozitiv.*

Soluţie. Funcţia $F(p)$ satisface condiţiile din a doua teoremă de dezvoltare. Folosind dezvoltarea în serie Laurent în jurul originii a funcţiei

$$e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^k},\quad |p| > R > 0,$$

stabilim că dezvoltarea în serie Laurent în jurul originii a funcţiei $F(p)$ este

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^{n+k+1}},\quad |p| > R > 0,$$

raza R a cercului în exteriorul căreia au loc aceste dezvoltări fiind oricândt de mică dorim. Punctul de la infinit este pentru această funcţie un punct ordinar.

Conform celei de a doua teoremă de dezvoltare, originalul funcţiei $F(p)$ este

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(n+k)!}\,t^{n+k}.$$

Această funcţie poate fi pusă în legătură cu *funcţiile lui Bessel* de speţa întâi şi de ordin întreg $J_n(t)$. Mai precis, se poate arăta că

$$f(t) = \sqrt{t^n}\,J_n(2\sqrt{t}) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}\Big).$$

În cazul particular $n = 0$, se obţine că funcţia original corespunzătoare $f(t)$ coincide cu funcţia rezultată din compunerea funcţiei Bessel de speţa întâi şi de ordin zero $J_0(u)$ cu funcţia $u = 2\sqrt{t}$. ■

Capitolul 12

ME–12. Aplicaţii ale transformării Laplace

12.1 Integrarea ecuaţiilor diferenţiale

Să considerăm problema determinării funcţiei $x(t), t > 0,$ care verifică ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi, neomogenă

$$a_0\, x^{(n)} + a_1\, x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, x' + a_n\, x = f(t) \tag{12.1}$$

şi condiţiile iniţiale

$$x(0+) = x_0, \quad x'(0+) = x_1, \quad x''(0+) = x_2, \cdots, x^{(n-1)}(0+) = x_{n-1}, \tag{12.2}$$

unde $f(t)$ este o funcţie dată, iar $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ sunt n numere date.

Soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate

$$a_0\, x^{(n)} + a_1\, x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, x' + a_n\, x = 0$$

este o sumă de funcţii de forma

$$e^{\alpha\, t}[P(t)\, \cos\beta t + Q(t)\, \sin\beta t],$$

unde $P(t)$ şi $Q(t)$ sunt polinoame. Deci, funcţia $x(t),$ nulă pentru $t < 0,$ care verifică ecuaţia omogenă şi condiţiile iniţiale (12.2), este o funcţie original împreună cu derivatele sale de orice ordin. În general nu putem afirma acelaşi lucru pentru ecuaţia (12.1) datorită prezenţei funcţiei $f(t)$.

În cele ce urmează, vom presupune că $f(t)$ este un original şi că funcţia $x(t),$ care verifică ecuaţia (12.1) şi condiţiile iniţiale (12.2), îndeplineşte condiţiile impuse originalelor, împreună cu derivatele lor până la ordinul n. Notăm

$$X(p) = \mathcal{L}x(t), \qquad F(p) = \mathcal{L}f(t).$$

Datorită proprietăţilor de liniaritate a transformatei Laplace, din ecuaţia (12.1) deducem

$$a_0\, \mathcal{L}x^{(n)} + a_1\, \mathcal{L}x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, \mathcal{L}x' + a_n\, \mathcal{L}x = \mathcal{L}f(t). \tag{12.3}$$

Conform egalităţii (11.22) şi ţinând seama de condiţiile iniţiale (12.2), avem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}x^{(n)}(t) &= p^n\, X(p) - (x_0\, p^{n-1} + x_1\, p^{n-2} + \cdots + x_{n-2}\, p + x_{n-1}),\\
\mathcal{L}x^{(n-1)}(t) &= p^{n-1}\, X(p) - (x_0\, p^{n-2} + x_1\, p^{n-3} + \cdots + x_{n-2}),\\
\cdots\cdots\cdots\cdot &\\
\mathcal{L}x''(t) &= p^2\, X(p) - (x_0 p + x_1),\\
\mathcal{L}x'(t) &= p\, X(p) - x_0,\\
\mathcal{L}x(t) &= X(p).
\end{aligned}$$

Introducem în (12.3) şi ordonăm termenii convenabil. Obţinem

$$(a_0\, p^n + a_1\, p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, p + a_n)X(p) = F(p) + G(p), \tag{12.4}$$

unde

$$\begin{aligned} G(p) = x_0(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \cdots + a_{n-2}p + a_{n-1}) + \\ + x_1(a_0p^{n-2} + a_1p^{n-3} + \cdots + a_{n-3}p + a_{n-2}) + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + x_{n-2}(a_0p + a_1) + \\ + x_{n-1}a_0. \end{aligned}$$

Egalitatea (12.4) se numeşte *ecuaţia operaţională* corespunzătoare ecuaţiei (12.1) cu condiţiile iniţiale (12.2). ecuaţia operaţională se reţine uşor dacă facem următoarele observaţii:

- X(p) se înmulţeşte cu polinomul caracteristic

$$\varphi(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n$$

  al ecuaţiei diferenţiale (12.1);

- $G(p)$ este o combinaţie liniară de polinoame

$$G(p) = x_0\varphi_0(p) + x_1\varphi_1(p) + \cdots + x_{n-1}\varphi_{n-1}(p);$$

- polinomul $\varphi_0(p)$ se obţine din polinomul caracteristic $\varphi(p)$ suprimând termenul liber şi împărţind cu p;
- prin acelaşi procedeu se obţine $\varphi_1(p)$ din $\varphi_0(p)$;
- $\varphi_2(p)$ se obţine suprimând termenul liber al polinomului $\varphi_1(p)$ şi împărţind rezultatul cu p şi aşa mai departe până se obţine $\varphi_{n-1}(p) = a_0$.

Din ecuaţia (12.4) deducem

$$X(p) = \frac{F(p) + G(p)}{\varphi(p)}.$$

Soluţia ecuaţiei (12.1) care satisface condiţiile iniţiale (12.2) este

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}X(p)$$

şi se determină fie folosind formula lui Mellin–Fourier, fie prin descompuneri convenabile ale funcţiei $X(p)$.

Exerciţiul 12.1.1. *Să se determine soluţia a ecuaţiei diferenţiale*

$$x'' + \omega^2\, x = (\lambda^2 + \omega^2)e^{-\lambda\, t}$$

care satisface condiţiile iniţiale

$$x(0+) = 1, \quad x'(0+) = \omega - \lambda.$$

Soluţie. Ecuaţia operaţională corespunzătoare este

$$(p^2 + \omega^2)X(p) \quad = \quad (\lambda^2 + \omega^2)\frac{1}{p + \lambda} + p + (\omega - \lambda)$$

şi se mai poate scrie

$$(p^2+\omega^2)X(p) \;=\; \omega + \frac{p^2+\omega^2}{p+\lambda}.$$

Deducem

$$X(p) \;=\; \frac{1}{p+\lambda} + \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Folosind rezultatele din Exemplul 11.3.2 şi Exerciţiul 11.5.1 determinăm originalul funcţiei $X(p)$

$$x(t) \;=\; e^{-\lambda t} + \sin\omega t,$$

funcţia astfel găsită fiind soluţie a problemei Cauchy date. ■

12.2 Integrarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare

Transformata Laplace se poate aplica şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi. Vom lua ca exemplu, sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} a_0x''+a_1x'+a_2x+b_0y''+b_1y'+b_2y=f(t)\\ \alpha_0x''+\alpha_1x'+\alpha_2x+\beta_0y''+\beta_1y'+\beta_2y=\varphi(t)\end{cases} \tag{12.5}$$

şi condiţiile iniţiale

$$x(0+)=x_0,\quad x'(0+)=x_1;\quad y(0+)=y_0,\quad y'(0+)=y_1. \tag{12.6}$$

În ipoteza că $f(t)$ şi $\varphi(t)$ sunt funcţii original şi că funcţiile $x(t)$, $y(t)$ care verifică sistemul (12.5) şi condiţiile iniţiale (12.6) sunt, de asemenea, funcţii original împreună cu primele două derivate, aplicăm transformata Laplace celor două ecuaţii (12.5) obţinând astfel sistemul operaţional

$$\begin{cases} (a_0p^2+a_1p+a_2)X(p)+(b_0p^2+b_1p+b_2)Y(p)=F(p)+\\ \qquad\qquad +x_0(a_0p+a_1)+x_1a_0+y_0(b_0p+b_1)+y_1b_0,\\ (\alpha_0p^2+\alpha_1p+\alpha_2)X(p)+(\beta_0p^2+\beta_1p+\beta_2)Y(p)=\Phi(p)+\\ \qquad\qquad +x_0(\alpha_0p+\alpha_1)+x_1\alpha_0+y_0(\beta_0p+\beta_1)+y_1\beta_0,\end{cases}$$

unde am notat, ca de obicei,

$$\mathcal{L}x(t)=X(p),\quad \mathcal{L}y(t)=Y(p),\quad \mathcal{L}f(t)=F(p),\quad \mathcal{L}\varphi(t)=\Phi(p).$$

Din acest sistem se deduc funcţiile $X(p)$, $Y(p)$. Soluţia problemei este sistemul de funcţii

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}X(p),\quad y(t)=\mathcal{L}^{-1}Y(p).$$

Exerciţiul 12.2.1. *Să se determine funcţiile $x(t)$ şi $y(t)$ care verifică sistemul*

$$\begin{cases} x''+2x'+x+y''+y'+y=1\\ 2x'+2x+y''+2y'=2t\end{cases}$$

şi condiţiile iniţiale

$$x(0+)=0,\quad x'(0+)=2;\quad y(0+)=1,\quad y'(0+)=-2.$$

Soluţie. Sistemul operaţional corespunzător este

$$\begin{cases} (p^2+2p+1)X(p)+(p^2+p+1)Y(p)=\dfrac{1}{p}+p+1 \\ (2p+2)X(p)+(p^2+2p)Y(p)=\dfrac{2}{p^2}+p. \end{cases}$$

Scăzând a doua ecuaţie din prima şi simplificând cu $p-1$, obţinem sistemul echivalent

$$\begin{cases} (p+1)X(p) & - & Y(p) & = & \dfrac{p+2}{p^2} \\ 2(p+1)X(p) & + & (p^2+2p)Y(p) & = & \dfrac{p^3+2}{p^2}. \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este

$$X(p) = \frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2+2p+2}, \qquad Y(p) = -\frac{1}{p^2}+\frac{p+1}{p^2+2p+2}.$$

Deoarece trinomul p^2+2p+2 are rădăcini imaginare, vom scrie

$$X(p) = \frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2+1}, \qquad Y(p) = -\frac{1}{p^2}+\frac{p+1}{(p+1)^2+1}.$$

Originalele acestor funcţii sunt

$$x(t)=t+e^{-t}\sin t, \quad y(t)=-t+e^{-t}\cos t$$

şi cu aceasta problema Cauchy este rezolvată. ■

12.3 Integrarea unor ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili

În cele expuse mai sus, am arătat cum metoda operaţională transformă problema integrării unei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, cu condiţii iniţiale date, în problema rezolvării unei ecuaţii algebrice. Se obţine astfel imaginea $X(p)$ a soluţiei $x(t)$. Dificultăţile de calcul sunt legate de determinarea originalului $x(t)$, cunoscută fiind imaginea sa.

Această metodă poate fi extinsă şi pentru unele ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili. Aplicând transformarea Laplace ecuaţiei date, aceasta se transformă uneori tot într–o ecuaţie diferenţială, care se poate întâmpla să se integreze mai uşor.

Să considerăm, de exemplu, ecuaţia diferenţială liniară

$$a_0\,x^{(n)}+a_1\,x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\,x'+a_n\,x=f(t) \tag{12.7}$$

în care coeficienţii a_k sunt polinoame în t

$$a_k=\alpha_{k0}\,t^r+\alpha_{k1}\,t^{r-1}+\cdots+\alpha_{k\,r-1}\,t+\alpha_{kr}$$

Ecuaţia (12.7) conţine în membrul stâng termeni de forma

$$\begin{cases} x, & tx, & t^2x,\cdots \\ x', & tx', & t^2x',\cdots \\ x'', & tx'', & t^2x'',\cdots \\ \cdots\cdot \\ x^{(n)}, & tx^{(n)}, & t^2x^{(n)},\cdots \end{cases} \tag{12.8}$$

Presupunem că $f(t)$ şi funcţia necunoscută $x(t)$, împreună cu derivatele sale până la ordinul n inclusiv, sunt originale. Aplicând transformarea Laplace ecuaţiei (12.7), va trebui să calculăm imaginile funcţiilor (12.8). Pentru aceasta folosim egalitătţile (11.22) şi (11.28). Avem

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}x = X(p),\ \mathcal{L}(tx) = -X'(p),\ \mathcal{L}(t^2x) = X''(p), \cdots \\
&\mathcal{L}x' = pX(p) - x(0+),\ \mathcal{L}(tx') = -[pX(p)]',\ \mathcal{L}(t^2x') = [pX(p)]'', \cdots \\
&\mathcal{L}x'' = p^2X(p) - [px(0+) + x'(0+)],\ \mathcal{L}(tx'') = -[p^2X(p)]' + x(0+), \cdots
\end{aligned} \tag{12.9}$$

dacă se aplică transformarea Laplace în ecuaţia (12.7) şi se folosesc relaţiile (12.9) se obţine ca ecuaţie operaţională tot o ecuaţie diferenţială liniară

$$A_0X^{(r)} + A_1X^{(r-1)} + \cdots + A_rX = \Phi(p).$$

Ordinul acestei ecuaţii este cel mult r, unde r este cel mai mare dintre gradele polinoamelor a_k. Coeficienţii $A_0, A_1, \cdots, A_r$ în număr uneori mai mic decît gradul ecuaţiei iniţiale, sunt polinoame în variabila p.

Exerciţiul 12.3.1. *Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale*

$$tx'' + x' + x = 0$$

care satisface condiţiile iniţiale $x(0+) = x_0,\ x'(0+) = x_1$.

Soluţie. Avem

$$\mathcal{L}(tx'') = -p^2X'(p) - 2\,pX(p) + x_0,$$
$$\mathcal{L}x' = pX(p) - x_0.$$

Obţinem ecuaţia operaţională

$$p^2X'(p) + (p-1)X(p) = 0$$

a cărei soluţie generală este

$$X(p) = C\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}},$$

C fiind o constantă arbitrară.

Observăm că, în conformitate cu Exerciţiul 11.5.13, originalul său este

$$x(t) = CJ_0(2\sqrt{t}),$$

unde $J_0(\tau)$ este funcţia lui Bessel de speţa întâia şi de ordinul zero

$$J_0(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k}.$$

Constanta C se determină folosind condiţiile iniţiale. Avem

$$x(t) = C\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^k}{(k!)^2}, \qquad x'(t) = C\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{kt^{k-1}}{(k!)^2}.$$

Condiţiile iniţiale dau

$$x(0+) = C = x_0, \qquad x'(0+) = -C = x_1.$$

Rezultă că cele două condiţii iniţiale nu pot fi date arbitrar. Va trebui să avem $x_0 = -x_1$. Presupunând această condiţie îndeplinită, soluţia problemei este $x(t) = x_0J_0(2\sqrt{t})$. Faptul că cele două condiţii iniţiale nu pot fi independente se poate explica amintind că ecuaţia de tip Bessel de forma celei din enunţ are soluţia

generală $x(t) = A\,J_0(2\sqrt{t}) + B\,Y_0(2\sqrt{t})$, unde $Y_0(t)$ este funcţia lui Bessel de speţa a doua, cu proprietatea $\lim\limits_{\tau\to 0}|Y_0(\tau)| = \infty$.

Pentru a fi îndeplinită ultima condiţie trebuie să luăm $B = 0$. Soluţia ecuaţiei, cu condiţii iniţiale date, se construieşte numai cu primul termen

$$x(t) = A\,J_0(2\sqrt{t})$$

şi pentru determinarea constantei A este suficientă doar o condiţie iniţială. ■

12.4 Integrarea unor ecuaţii cu derivate parţiale

Să considerăm ecuaţia liniară

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\,\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta\,\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma\,u = \varphi(x,t), \tag{12.10}$$

unde $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ sunt funcţii numai de x, continu e pe un interval $[0, l]$.

Se pune problema determinării soluţiei $u(x,t)$ a acestei ecuaţii pentru

$$(x,t) \in [0,l] \times (0,\infty),$$

care satisface condiţiile iniţiale

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x); \quad (\forall)\, x \in [0,l] \tag{12.11}$$

şi condiţiile la limită

$$\begin{cases} \left[A\dfrac{\partial u}{\partial x} + B\dfrac{\partial u}{\partial t} + Cu\right]_{x=0} & = & h(t) \\ \left[A_1\dfrac{\partial u}{\partial x} + B_1\dfrac{\partial u}{\partial t} + C_1 u\right]_{x=l} & = & k(t) \end{cases} \tag{12.12}$$

unde A, B, C, A_1, B_1, C_1 sunt constante, iar $h(t)$ şi $k(t)$ funcţii date.

Vom presupune că $h(t)$ şi $k(t)$ sunt funcţii original. Fie $H(p)$ şi $K(p)$ imaginile lor. De asemenea, presupunem că $\varphi(x,t)$ este un original în raport cu t şi notăm

$$\Phi(x,p) = \mathcal{L}\varphi(x,t) = \int_0^\infty \varphi(x,t)e^{-pt}dt.$$

În ipoteza că soluţia $u(x,t)$ a problemei, precum şi derivatele sale parţiale de primele două ordine satisfac în raport cu t condiţiile impuse funcţiilor original oricare ar fi $x \in [0,l]$, putem aplica transformarea Laplace ecuaţiei (12.10) şi condiţiilor (12.12). Deoarece $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ nu depind de t, avem

$$a\,\mathcal{L}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\,\mathcal{L}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\mathcal{L}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta\mathcal{L}\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma\mathcal{L}u = \Phi(x,p). \tag{12.13}$$

De asemenea,

$$\begin{cases} \left[A\mathcal{L}\dfrac{\partial u}{\partial x} + B\mathcal{L}\dfrac{\partial u}{\partial t} + C\mathcal{L}u\right]_{x=0} & = & H(p) \\ \left[A_1\mathcal{L}\dfrac{\partial u}{\partial x} + B_1\mathcal{L}\dfrac{\partial u}{\partial t} + C_1\mathcal{L}u\right]_{x=l} & = & K(p) \end{cases} \tag{12.14}$$

pentru că integrarea în raport cu t şi înlocuirile $x = 0$, $x = l$ sunt operaţii independente.

Avem

$$\mathcal{L}u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt = U(x,p),$$

$$\mathcal{L}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)e^{-pt}dt = \frac{dU}{dx}(x,p),$$

$$\mathcal{L}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-pt}dt = \frac{d^2 U}{dx^2}(x,p).$$

Am notat derivatele funcţiei $U(x,p)$ în raport cu x cu $\dfrac{dU}{dx}(x,p)$, $\dfrac{d^2U}{dx^2}(x,p)$ deoarece, în cele ce urmează, p figurează ca un parametru în raport cu care nu avem de derivat. Pe de altă parte, în conformitate cu (11.22) şi ţinând seama de condiţiile iniţiale (12.11), avem

$$\begin{cases} \mathcal{L}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & p\,U(x,p) - f(x), \\ \mathcal{L}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & = & p^2\,U(x,p) - [p\,f(x) + g(x)]. \end{cases}$$

Introducem în (12.13) şi (12.14). Obţinem ecuaţia operaţională

$$a\frac{d^2U}{dx^2} + b\frac{dU}{dx} + cU = d, \tag{12.15}$$

unde

$$c = \alpha p^2 + \beta p + \gamma, \quad d = \Phi(x,p) + (\alpha p + \beta)f(x) + \alpha g(x),$$

şi condiţiile la limită

$$\begin{cases} \left[A\dfrac{dU}{dx} + (Bp + C)U\right]_{x=0} & = & H(p) + Bf(0+) \\ \left[A_1\dfrac{dU}{dx} + (B_1 p + C_1)U\right]_{x=l} & = & K(p) + B_1 f(l) \end{cases} \tag{12.16}$$

Ecuaţia operaţională (12.15) este o ecuaţie diferenţială ordinară liniară cu coeficienţi funcţii de x şi de parametrul p. De obicei, integrarea acestei ecuaţii cu condiţiile (12.16) este o problemă mai simplă decândt problema iniţială. Fie $U(x,p)$ soluţia ecuaţiei (12.15) care verifică egalităţile (12.16). Soluţia problemei iniţiale va fi originalul acestei funcţii,

$$u(x,t) = \mathcal{L}U(x,p).$$

Observaţia 12.4.1. *În cazul când ecuaţia este de tip parabolic, nu trebuiesc date două condiţii iniţiale şi două condiţii la limită.*

Exerciţiul 12.4.1. *Să se determine soluţia $u(x,t)$ a ecuaţiei*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A\sin\omega t,$$

unde A, a şi ω sunt constante reale, care satisface condiţiile iniţiale

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in [0,\ell]$$

şi condiţiile la limită

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Soluţie. În ipoteza că soluţia $u(x,t)$ a problemei şi derivatele sale parţiale de primele două ordine satisfac în raport cu t condiţiile impuse funcţiilor original, oricare ar fi $x \in [0,\ell]$, se poate aplica transformarea Laplace ecuaţiei date şi condiţiilor la limită. Se obţine ecuaţia operaţională

$$a^2\,\frac{d^2U}{dx^2} - p^2\,U(x,p) \;= -\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}$$

cu condiţiile la limită

$$U(0,p)=0, \quad U(\ell,p)=0,$$

unde

$$U(x,p)=\mathcal{L}u(x,t)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt.$$

Soluţia generală a ecuaţiei operaţionale este

$$U(x,p) \;=\; C_1 e^{\frac{p}{a}x} \;+\; C_2 e^{-\frac{p}{a}x} \;+\; \frac{A\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}.$$

Din condiţiile la limită se determină C_1 şi C_2, după care rezultă că

$$U(x,p) \;=\; \frac{A\omega}{p^2(p^2+\omega^2)} \;-\; \frac{A\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}\cdot\frac{e^{\frac{p}{a}x}+e^{-\frac{p}{a}(x-\ell)}}{1+e^{\frac{p}{a}\ell}}.$$

Soluţia problemei la limită şi cu condiţii iniţiale date va fi

$$u(x,t) \;=\; A\mathcal{L}^{-1}\frac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)} \;-\; A\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}\cdot\frac{e^{\frac{p}{a}x}+e^{-\frac{p}{a}(x-\ell)}}{1+e^{\frac{p}{a}\ell}}\Big].$$

Rămâne acum să determinăm inversele prin transformata Laplace a funcţiilor de mai sus. Aceasta se poate face folosind formula lui Mellin–Fourier. ■

12.5 Rezolvarea unor ecuaţii integrale

În cele ce urmează vom da două tipuri de ecuaţii integrale care pot fi rezolvate prin metode operaţionale.

Prima ecuaţie are forma

$$Ax(t)+B\int_0^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau = Cf(t), \tag{12.17}$$

în care A, B, C sunt constante, iar $f(t)$ şi $k(t-\tau)$ sunt funcţii cunoscute. Funcţia necunoscută este $x(t)$ şi figurează şi sub semnul de integrare. De aceea egalitatea (12.17) se numeşte *ecuaţie integrală.* Funcţia $k(t-\tau)$ se numeşte *nucleul ecuaţiei integrale* şi în general este o funcţie de două variabile, $k(t,\tau)$. Deci, putem spune că ecuaţia (12.17) este un caz particular al ecuaţiei

$$Ax(t)+B\int_0^t x(\tau)k(t,\tau)d\tau = Cf(t),$$

în care nucleul $k(t,\tau)$ este o funcţie de două variabile.

Să presupunem că funcţiile $f(t)$, $k(t)$ şi funcţia necunoscută $x(t)$ sunt originale. Notăm

$$\mathcal{L}f(t)=F(p), \quad K(p)=\mathcal{L}k(t), \quad X(p)=\mathcal{L}x(t).$$

Conform egalităţii (11.47) din Teorema 11.5.9 (Borel), avem

$$\mathcal{L}\int_0^t x(\tau)k(t-\tau)\,d\tau = X(p)K(p).$$

Deci, aplicând transformata Laplace, ecuaţia integrală (12.17) se transformă în egalitatea

$$[A+BK(p)]X(p)=CF(p) \tag{12.18}$$

care se numeşte *ecuaţia operaţională* corespunzătoare ecuaţiei integrale (12.17).

Din aceasta se deduce

$$X(p)=\frac{CF(p)}{A+BK(p)}.$$

Soluţia ecuaţiei integrale (12.17) este originalul acestei funcţii.

Exerciţiul 12.5.1. *Să se rezolve ecuaţia integrală*

$$x(t)-2\omega\int_0^t x(\tau)\,\sin\omega(t-\tau)\,d\tau=\lambda\,\cos\omega t.$$

Soluţie. Ecuaţia operaţională corespunzătoare este

$$\Big(1-\frac{2\omega^2}{p^2+\omega^2}\Big)X(p)=\lambda\,\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Rezultă

$$X(p)=\lambda\frac{p}{p^2-\omega^2}=\frac{\lambda}{2}\Big(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\Big).$$

Soluţia ecuaţiei integrale este originalul acestei funcţii,

$$x(t)=\lambda\,\cosh\omega t.$$

Pentru determinarea rezultatului s–a ţinut cont de faptul că originalul fracţiilor simple de mai sus sunt respectiv funcţiile $e^{\lambda\,t}$ şi $e^{-\lambda\,t}$. ■

Cea de a doua ecuaţie integrală căreia i se poate aplica metoda operaţională este

$$Ax(t)+B\int_0^t x(\tau)x(t-\tau)\,d\tau=Cf(t). \tag{12.19}$$

Ecuaţia operaţională corespunzătoare este

$$BX^2(p)+AX(p)-CF(p)=0. \tag{12.20}$$

Soluţiile acestei ecuaţii algebrice sunt imaginile soluţiilor ecuaţiei integrale.

Exerciţiul 12.5.2. *Să se determine o soluţie a ecuaţiei integrale*

$$-x(t)+\frac{1}{2}\int_0^t x(\tau)x(t-\tau)\,d\tau=\cos t.$$

Soluţie. Aplicând teoria de mai sus, se obţine ecuaţia operaţională

$$X^2(p)-2X(p)-\frac{2p}{p^2+1}=0,$$

care are soluţiile

$$X(p)=\frac{\sqrt{1+p^2}\pm p}{\sqrt{1+p^2}}\pm\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Dacă din cele două soluţii alegem

$$X(p)=\frac{-p+\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},$$

atunci originalul ei este

$$x(t) = J_1(t) - J_0(t)$$

unde J_0, J_1 sunt funcţiile Bessel de speţa întâi: prima, de ordin zero; a doua, de ordin unu. Funcţia original $x(t)$ este o soluţie a ecuaţiei integrale date. ■

12.6 Calculul unor integrale improprii

Arătăm pe un exerciţiu cum se utilizează transformata Laplace pentru calculul unor integrale improprii.

Exerciţiul 12.6.1. *Să se calculeze integralele improprii:*

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^2}\,dx; \quad I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx; \quad I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\,dx.$$

Soluţie. Pentru calculul primei integrale considerăm integrala improprie depinzând de parametrul t

$$I_1(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^3 tx}{x^2}\,dx,$$

căreia îi aplicăm transformata Laplace. Avem

$$\mathcal{L}I_1(t) = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \frac{\sin^3 tx}{x^2}\,dx\Big)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \int_0^\infty (\sin^3 tx)e^{-pt}dt.$$

Integrala din interior este

$$\mathcal{L}\sin^3 tx = \frac{3}{4}\mathcal{L}\sin tx - \frac{1}{4}\mathcal{L}\sin 3tx = \frac{3}{4}\,\frac{x}{p^2+x^2} - \frac{1}{4}\,\frac{3x}{p^2+9x^2}.$$

Înlocuind această valoare a integralei din interior şi efectuând schimbarea de variabilă $x^2 = u$, găsim

$$\mathcal{L}I_1(t) = 3\int_0^\infty \frac{1}{(p^2+u)(p^2+9u)}du.$$

Valoarea acestei integrale se determină imediat şi se găseşte

$$\mathcal{L}I_1(t) = \Big(\frac{3}{4}\ln 3\Big)\frac{1}{p^2} \quad \Longrightarrow \quad I_1(t) = \frac{3t}{4}\ln 3$$

de unde, luând $t = 1$, se deduce $I = \dfrac{3}{4}\ln 3$.

Pentru calculul celei de a doua integrale se procedează analog considerând funcţia $I_1(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+x^2}dx$ căreia îi aplicăm transformarea Laplace. Avem

$$\mathcal{L}I_1(t) = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+x^2}dx\Big)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx \int_0^\infty (\cos tx)e^{-pt}dt.$$

Integrala din interior este transformata Laplace a funcţiei $\cos tx$ care se ştie că este $\mathcal{L}\cos tx = \dfrac{p}{p^2+x^2}$ astfel că putem scrie $\mathcal{L}I_1(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{p}{p^2+x^2}dx$. Valoarea acestei integrale se poate determina fie folosind descompunerea în fracţii simple, fie utilizând teorema reziduurilor. Se găseşte

$$\mathcal{L}I_1(t) = \frac{\pi}{2(p+1)} \quad \Longrightarrow \quad I_1(t) = \frac{\pi}{2}e^{-t} \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\pi}{2e}.$$

Pentru a treia integrală, pornind de la integrala $I_1(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin tx^3}{x}dx$ se ajunge la $\mathcal{L}I_1(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{p^2+x^6}dx = \frac{\pi}{6p}$ şi de aici la valoarea $I = \dfrac{\pi}{6}$ a integralei date. ■